Chapitre 04 : Déterminant

- $\rightarrow$ A est inversible ssi $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = I_n$
- $\rightarrow$ A est inversible ssi $\det A \neq \emptyset$
- $\rightarrow$ $\mathrm{Com}(A) = (\mathcal{M}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $\mathcal{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$
- $\rightarrow$ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \, {}^t(\mathrm{Com}(A))$
- $\rightarrow$ $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

  Preuve : $A^{-1} A = I$

  $\det(A^{-1}A) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1$

  $\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\rightarrow$ $\det({}^tA) = \det A$
- $\rightarrow$ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
- $\rightarrow$ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Longrightarrow rg(A) \leqslant \min(m,n)$
- $\rightarrow$ Si une colonne (resp. ligne) d'une matrice est combinaison des autres colonnes (resp. lignes)

  $\Longrightarrow \det \mathcal{M} = 0$
- $\rightarrow$ Un end. nilpotent d'indice p :

  c-à-d $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ c-à-d $\forall x \in E \cdot f^p(x) = 0$ et $\exists x_0 \in E \,/\, f^{p-1}(x_0) \neq 0$

Chapitre 05 : Syst. d'Éq. linéaires

- $\rightarrow$ Le système est de Cramer $\Longleftrightarrow \begin{cases} (A) \text{ est carré.} \\ A \text{ est inversible.} \end{cases}$
- $\rightarrow$ Méthode matricielle :

$$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

Hamza!

- $\rightarrow$ Méthode de déterminant :

$$x_i = \frac{|C_1 \cdots C_{i-1}\, b\, C_{i+1} \cdots C_n|}{\det A} \quad \text{où} \quad A = (C_1 \cdots C_2)$$

- $\rightarrow$ Calculer le rang(A) :
  - $\rightarrow$ $rg(A) \leqslant \min(m,n)$ $\rightsquigarrow$ On vérifie si $\exists$ un det nul d'ordre "$\min(m,n)$"
    - si $\exists$ un det $\neq 0$ $\rightarrow$ $rg(A) = \min(m,n)$
    - si $\nexists$ det $\neq 0$ $\rightarrow$ $rg(A) < \min(m,n)$ $\rightarrow$ On passe à l'ordre "$\min(m,n) - 1$"

Chapitre 06 : Réduction des Endomorphismes

E un $\mathbb{K}$-ev , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$

→ x vecteur propre associe à la valeur propre λ si $\begin{cases} x \neq 0_E \\ f(x) = \lambda x \end{cases}$

→ x vect. propre associe à la val propre $\lambda \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ \lambda \text{ est unique} \\ \cdot\cdot\ \forall \mu \in \mathbb{K}^* : \mu x \text{ est un vect. propre associe à } \lambda \\ \text{(c-à-d on associe une infinité de valeur propre)} \end{cases}$

→ Le s-e propre associe à λ : $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$

→ $\lambda \in \sigma(f) \iff E_\lambda \neq \{0_E\}$; L'ens. des vect pr. associe à λ est : $E_\lambda \setminus \{0_E\}$

→ si f est un end. nilpotent, alors $\sigma(f) = \{0\}$

→ $A \in M_n(\mathbb{K})$; λ valeur propre de A si $\exists\, U \in M_n(\mathbb{K})$ et $U \neq 0$ tq $AU = \lambda U$

→ $P_A(X) = \det(A - XI_n)$: polynôme caracteristique de A

→ $d°P_A(X) = n = \dim E$; $P_A(0) = \det A$

Hamza Ebatru!

→ Le coeffition de X^n dans $P_A(X)$ est : $(-1)^n$

→ $P_A(A) = 0$ Cayly Hamilton $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

→ $\mathrm{Card}\,\sigma(A) \leq n = \dim E$ → Preuve : $\sigma(f) = \{x_1 \cdots x_p\}$ $p > n$; $P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2} \cdots (X-\lambda_p)^{n_p}$ $\Rightarrow d°P = p > n$ (absurde)

→ deux matrice semblables ont m̂ polynôme caracteristique

Diagonalisation :

Un end. f est diag. si $\exists$ une base B tq $\mathrm{mat}(f, B)$ est diagonale

Critère 3 : si $\dim E = n$ et A admet n valeurs propres $\neq$
$\Rightarrow$ A est diagonable.

→ si $\mathrm{Card}\,\sigma(A) < n$ On ne peut rien dire sur la diag.

→ si λ est valeur propre siple, alors $\dim E_\lambda = 1$

Critère 1 : f est diagonable ssi :
$P_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{n_p}$ avec $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$
et $\dim E_{\lambda_i} = n_i \quad \forall i = 1 \cdots p$

→ Si $\exists i_0 \in \{1 \cdots p\}$ tq $\dim E_{\lambda_{i_0}} < n_{i_0}$
alors A non diagonable

Critère 2 : E un $\mathbb{K}$-ev, $\dim E = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$
et $\sigma(f) = \{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p\}$.
f est diag ssi $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}$

Methode de diagonalisat° :

→ $P_A(X) = ?$
→ $\sigma(A) = ?$ (voir Critère 3)
→ les s-e propre
→ Conclusion :

$\cdot\ B_v = \{U_1 \cdots U_n\}$ base de diag.

$\cdot\cdot\ P_B^{B_v} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_1 & \cdots & U_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$

$\cdot\cdot\cdot\ D = \mathrm{mat}(f, B_v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(U_1) & \cdots & f(U_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$

$D = P^{-1}AP \qquad A = PDP^{-1}$

Trigonalisation :

Un end f est trig. si $\exists$ base B tq $\mathrm{mat}(f, B)$ est triangulaire
A est trigonalisable si $\exists$ M inv $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $T = P^{-1}AP$ est triangulaire

Critère : → f est trig. ssi $P_f(X)$ à ttes racines ds $\mathbb{K}$.
$A \in M_n(\mathbb{K})$ → A est trig ssi $P_A(X)$ à ttes racines ds $\mathbb{K}$.

Methode de trigonalisation :

→ Calculons $P_A(X)$ → $\sigma(A) = ??$
→ On verifie si les valeurs propres de A sont ttes ds $\mathbb{K}$.
→ Conclusion :

De plus ; On determine pr chaque s-e-propre E_λ une base B_i

$L = \bigcup_i B_i$ est de Card $m < n$	$L = \bigcup_i B_i$ est de Card n.
$\Rightarrow$ A est trigonalisable (mais non diag) et on complete alors $L = \{e_1 \cdots e_m\}$ lin indep par des vect $\{e_{m+1} \cdots e_n\}$ en une base $C = \{e_1, e_2 \cdots e_m, e_{m+1} \cdots e_n\}$ de E de telle sorte : $f(e_k) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$ pr $k > m$	$\Rightarrow$ $\exists$ n vecteurs propres $U_1 \cdots U_n$ liné indep et donc A est diagonalisable de +, la matrice P dont les colonnes sont les vect de L diagonalise A.

→ La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de C trigonalise A.

Chapitre VII : Formes bilinéaires et Formes Quadratique :

→ Une forme bilinéaire sur E ; une appl. $\phi : E \times E \longrightarrow E$, $(x,y) \longrightarrow \phi(x,y)$ linéaire par rapport à chaque variable :

C-à-d, $\forall x, x', y, y' \in E$ $\forall \alpha, \beta \in K$: $\begin{cases} \phi(x+x', y) = \phi(x,y) + \phi(x',y) \\ \phi(\alpha x, y) = \alpha\, \phi(x,y) \\ \phi(x, y+y') = \phi(x,y) + \phi(x,y') \\ \phi(x, \beta y) = \beta\, \phi(x,y) \end{cases}$

→ ϕ est symetrique si $\forall x, y \in E$: $\phi(x,y) = \phi(y,x)$

→ ϕ est antisymetrique si $\forall x, y \in E$: $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$

→ $\mathrm{mat}(\phi, B) = (\phi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

→ $\dim \mathcal{L}_2(E) = n^2$

$A_2(E)$: l'ens. des formes bilin antisym

$S_2(E)$: l'ens des formes bilin. sym.

→ $S_2(E)$ est un s-ev de $\mathcal{L}_2(E)$

→ $A_2(E)$ est un s-ev de $\mathcal{L}_2(E)$

Hamza!

→ $\dim S_2(E) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\dim A_2(E) = \frac{n(n-1)}{2}$

→ $\mathcal{L}_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$

→ $\forall \phi \in \mathcal{L}_2(E)$, on a $\phi(x,y) = \phi_1(x,y) + \phi_2(x,y)$ où
- $\phi_1(x,y) = \frac{1}{2}(\phi(x,y) + \phi(y,x))$
- $\phi_2(x,y) = \frac{1}{2}(\phi(x,y) - \phi(y,x))$

→ $\mathcal{L}_2(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$.

→ ϕ est alternée ssi $\forall x \in E$: $\phi(x,x) = 0$.

→ si $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ et $y = (y_1, y_2 \dots y_n) \in E$: $\phi(x,y) = {}^tXAY = {}^tYAX$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \mathrm{mat}(\phi, B)$

→ $A = \mathrm{mat}(\phi, B)$ et $A' = \mathrm{mat}(\phi, B')$ alors $A' = {}^tPAP$ où $P = P_B^{B'}$

→ Si ϕ est symetrique, alors $q(x) = \phi(x,x)$: la forme quadratique associe à ϕ.

→ q n'est pas linéaire. $q(\alpha x) = \phi(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 q(x)$.

→ si q une f.q alors $\phi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ la f.b. sym associe à q.

→ x est isotrope si $\phi(x,x) = 0$

→ $F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F : \phi(x,y) = 0\}$

→ $\mathrm{rad}\,\phi = \{x \in E / \forall y \in E : \phi(x,y) = 0\}$

→ si ϕ est sym. on a : $\mathrm{Ker}\,\phi = \{x \in F / \forall y \in E : \phi(x,y) = 0\}$

→ ϕ est non dégénérée (ou propre) si :

$\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ (ϕ est symetrique)

→ F et G 2 s-ev de E forment somme orthogonal si $E = F \oplus G$ et $\forall x \in F$, $\forall y \in G$: $\phi(x,y) = 0$

→ Une base $B = \{e_1, \dots e_n\}$ de E est orthogonale (pr ϕ) si $\phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ pr $i,j = 1 \dots n$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ le symbole de KRONECKER

→ x est $\perp$ à F si $\forall y \in F$: $\phi(x,y) = 0$

F et G 2 s-ev de E :

→ $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$

→ $F \subset (F^\perp)^\perp$

→ $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

→ $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

→ $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{rad}\,\phi)$

Si ϕ est non dégénérée :

→ $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

→ $F = (F^\perp)^\perp$

→ $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$